数理解析研究所講究録
206巻 1974年 64-91

Flowのspectral subspaceとその応用

山形大理 富山淳

§0. ヒルベルト空間上の強連続なone-parameterユニタリー群 U_t が与えられたとき、それについてprojectionの測度 dP_s が存在して

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-its}\, dP_s$$

とかけるというStoneの定理の価値は今さら言う迄もないが、線型作用素のone-parameter群が与えられる空間がヒルベルト空間でない場合もしばしばあることは事実である。従ってその時にも適用出来るStoneの定理に代るものがあれば当然非常に有力な方法になることが予想される。そこでprojectionの測度の代りにそれの元となる値域の部分空間をとりあげそれらがどう元のone-parameter群を決定しているかを考えたのが、spectral subspaceの議論である。ここではその基本理論とその応用例を整理した形で紹介する。([1], [2] [6], [8])。この方法は現在特に非可換な作用素環の同

対応の研究に盛んに応用されている。

§1 基本性質と定義

X を Banach 空間とし、R を実数空間とする。X 上に一様有界な線型作用素の（強連続）one-parameter 群 A_t $(t \in R)$ が与えられているとする。$\forall x \in X$ $f \in L^1(R)$ について x と f との（一般化された）convolution $x \underset{A}{*} f$ を

$$x \underset{A}{*} f = \int_R A_t x f(t) dt$$

と定義する。

定義より $x \longrightarrow x * f$ は X 上の有界な線型作用素であり、$L^1(R)$ の中の普通の convolution $f*g$ と次の意味で両立する。

$$x \underset{A}{*} (f*g) = (x \underset{A}{*} f) \underset{A}{*} g$$

以下混乱のおそれのないときは one-parameter 群 A_t を明記しないことにする。$L^1(R)$ の ideal $J(x)$ を

$$J(x) = \{ f \in L^1(R) ; \ x*f = 0 \}$$

定義 1.1. $J(x)$ の hull を x の spectrum とよび $sp_A(x)$（又は単に $sp(x)$）とかく。即ち

$$sp(x) = \{ t \in R ; \ \hat{f}(t) = 0 \quad \forall f \in J(x) \}.$$

但し $\hat{f}$ は f の Fourier 変換

$$\hat{f}(t) = \int_R f(s) e^{-ist} ds$$

定義から

補題 1.1. f_λ を $L^1(R)$ の approximate identity とする

と、 $x * f_\lambda \to x \quad (\forall x \in X)$.

補題 1.2.

(1) $sp(x*f) \subset sp(x)$ (2) $sp(x*f) \subset \mathrm{supp}\,\hat{f}$

(3) $\hat{f}$ が $sp(x)$ の近傍で 0 ならば $x*f = 0$

(4) $\hat{f}$ が $sp(x)$ の近傍で 1 ならば $x*f = x$

(3) は Fourier 変換が hull の近傍で 0 になるような $L^1(R)$ の元は、元の ideal に含まれるという結果のよみかえである。

(4) は (3) の結果.

補題 1.3.

(1) $sp(A_t x) \subset sp(x)$ (2) $sp(\lambda x) = sp(x)$ $\lambda \neq 0$

(3) $sp(x+y) \subset sp(x) \cup sp(y)$

よって次の補題が成立する.

補題 1.4. E を R の閉集合とすると

$$M_A[E] = \{x \in X ; \ sp(x) \subseteq E\}$$

は、X の A_t-invariant な閉部分空間である.

この $M_A[E]$ を (A_t に対する) E についての spectral subspace と呼ぶことにする. 補題 1.1 より次のことが成立つ。

補題1.5　$sp(x)$ が compact であるような元 x の集合は X で dense である.

$-\infty \leq t \leq w \leq \infty$ について

$$R[t, w] = \text{closed linear span}\{x*f \mid x \in X,\ f \in L^1(R)\ \operatorname{supp}\hat{f} \subset (t, w)\}$$

$$I_0[t, w] = \{f \in L^1(R);\ \hat{f} \text{ は } [t, w] \text{ の近傍で } 0\}$$

とおくと、$M_A[t, w]$ について

定理1.6.　$M_A[t, w] = \{x \in X : x*f = 0\ \ \forall f \in I_0[t, w]\}$
$$= \bigcap_n R[t - \tfrac{1}{n}, w + \tfrac{1}{n}]$$

証明. 左より順に E_1, E_2, E_3 とすると、補題1.2の(3)より $E_1 \subseteq E_2$. $x \in E_2$ について $\varphi \in R[t - \frac{1}{n}, w + \frac{1}{n}]^{\perp}$ をとると、$f \in I_0[t, w]$ については $x*f = 0$ より $\langle x*f, \varphi \rangle = 0$.

一方　$J = \{f \in L^1(R);\ \operatorname{supp}\hat{f} \subset (t - \frac{1}{n}, w + \frac{1}{n})\}$

とおけば、$\forall g \in J$; $x*g \in R[t - \frac{1}{n}, w + \frac{1}{n}]$. よって

$\langle x*g, \varphi \rangle = 0$.　前と合せて結局

$f \in J + I_0[t, w]$ について　$\langle x*f, \varphi \rangle = 0$.

ところが　$\operatorname{hull}(J + I_0[t, w]) \subset \operatorname{hull} J \cap [t, w] = \phi$

$\therefore$　$\overline{J + I_0[t, w]} = L^1(R)$.

これより　$\langle A_t x, \varphi \rangle = 0$ a.e. となり連続性から

$\langle A_t x, \varphi \rangle = 0\ \ \forall t$.　特に　$\langle x, \varphi \rangle = 0$

よって　$E_2 \subset R[t-\frac{1}{n}, w+\frac{1}{n}]$ すれ $\Longrightarrow E_2 \subseteq E_3$

最後に $\forall x \in E_3$ について　$s \notin [t, w]$ ならば $s \notin sp(x)$ が容易に出るから　$sp(x) \subseteq [t, w]$　i.e.　$E_3 \subseteq E_1$.

Xが特にヒルベルト空間のとき、その中の閉部分空間の one-parameter 減少列 $\{M_t\}$ が次の条件をみたせば、単位の分解と呼ぶ。　$X = \vee M_t$,　$\wedge M_t = \{0\}$.

又　$M_t = \bigwedge_{s<t} M_s$　となっているとき M_t は左に連続という。この時には X 上の有界線型作用素全体の環 $B(X)$ に R 上の projection-valued な Borel 測度 $P(E)$ が存在して

$$P_{[s,t)}X = M_s \ominus M_t, \quad P_R X = X$$

$$P_{[s,\infty)}X = M_s$$　となる。今この測度から one-parameter ユニタリー群　$U_t = \int_R e^{-ist} dP_s$　をつくると、当然予想されるように

Proposition 1.7　Rの閉集合Eについて

$$M_U[E] = P_E X$$

証明には次の等式に留意すればよい。

$\forall f \in L^1(R)$

$$x * f = \int_R \hat{f}(s)\, dP_s x = \int_E \hat{f}(s)\, dP_s x + \int_{E^c} \hat{f}(s)\, dP_s x$$

次に V_t を与えられた one-parameter ユニタリー群とする。

補題1.8. $M_t = M_V[t, \infty)$ とおけば $\{M_t\}$ は左側連続な単位の分解である。

証明は定義に従えばよい。

さてこの M_t より測度 P_E をつくることが出来、その結果 U_t が前述のように定義できるがこの U_t の spectral subspace は V_t のそれと一致している。そしてこのとき $V_t = U_t$ を主張しているのが Stone の定理である。ここでは次の節でこのことをもっと一般の形で考えてみる。

§2. 三つの one-parameter 群についての commutation theorem.

ϕ を R^3 上の有界な連続関数としたとき、ϕ の spectrum を通常のように定義する。即ち

$$J(\phi) = \{ f \in L^1(R^3) ;\ \phi * f = 0 \}$$

$$sp(\phi) = J(\phi) \text{ の hull.}$$

Proposition 2.1. R^3 の集合 $G = \{(a, b, a+b)\}$

$$sp(\phi) \subset G \rightleftarrows \phi(r, s, t) = \phi(r+v, s+v, t-v)$$

証明. $T ; R \to R^3$ を $Tv = (v, v, -v)$

$$\phi \underset{T}{*} f(P) \equiv \int_R \phi(P - Tv) f(v)\, dv \qquad f \in L^1(R)$$

又 $g \in L^1(R^3)$ についても

$$g \underset{T}{*} f(P) \equiv \int_R g(P - Tv) f(v)\, dv$$

定義よりこの convolution と通常の convolution について

$$(\phi \underset{T}{*} f) * g = \phi * (g \underset{T}{*} f)$$

さて $\gamma = (\gamma', \gamma'', \gamma''')$ について

$$\widehat{g \underset{T}{*} f}(\gamma) = \hat{g}(\gamma)\hat{f}(\gamma' + \gamma'' - \gamma''')$$ そこで

今 $sp(\phi) \subset G$ とする。$\hat{f}$ が 0 の近傍で 0 となるとすると、$\widehat{g \underset{T}{*} f}$ は $sp(\phi)$ の近傍で 0 となる。よって補題1.2の(3)から

$$g \underset{T}{*} f \in J(\phi) \implies (\phi \underset{T}{*} f) * g = 0 \quad \forall g \in L^1(R^3)$$

よって $\phi \underset{T}{*} f = 0$ で結局この式は $\hat{f}(0) = 0$ となる任意の $f \in L^1(R)$ について成立つことになる。このことから容易に

$$\phi \underset{T}{*} f = \phi \int_R f(v)\,dv$$

よって

$$\int_R (\phi(p - Tv) - \phi(p)) f(v)\,dv = 0 \quad \forall f \in L^1(R)$$

$$\therefore \quad \phi(p - Tv) = \phi(p) \quad a.e.$$

ϕ の連続性より $\phi(p - Tv) = \phi(p) \quad \forall v.$

逆は容易である。

A_t, B_t ; X 上の一様有界強連続な線型作用素の one-parameter 群

T_t ; 別な Banach 空間 Y 上の one-parameter 群.

L ; Y より $B(X)$ への有界線型写像

補題 2.2. $\varphi \in X^*$ について

$\phi(r,s,t) = \langle B_t L(T_r y) A_s x, \varphi \rangle$ とおくと

$B_t L(y) = L(T_t y) A_t \rightleftarrows \phi(r,s,t) = \phi(r+v, s+v, t-v)$

証 略.

そこで目標とするのは次の結果である.

定理 2.3. 上の設定で commutation relation

$$B_t L(y) = L(T_t y) A_t \quad \forall y \in Y,\ t \in R$$

が成立つための必要十分条件は、次の、spectral subspace についての条件がみたされることである;

$$\left.\begin{array}{l} sp_T(y) \subset (a, \infty) \\ sp_A(x) \subset (b, \infty) \end{array}\right. \Longrightarrow sp_B(L(y)x) \subset (a+b, \infty)$$

且つ

$$\left.\begin{array}{l} sp_T(y) \subset (-\infty, a) \\ sp_A(x) \subset (-\infty, b) \end{array}\right. \Longrightarrow sp_B(L(y)x) \subset (-\infty, a+b)$$

このことは $M_T[E]$, $M_A(E)$, $M_B[E]$ を用いても言いかえることができる.

証明. $\phi(r,s,t) = \langle B_t L(T_r y) A_s x, \varphi \rangle$ とおいて命題 2.1 の形で証明する.

$(a,b,c) \in R^3$ $a+b \neq c$ をとる。$a+b<c$ のとき ε を $a+b+4\varepsilon < c$ となる正数とする。$f, g, h \in L^1(R)$ を

$$\hat{f} = 0 \quad \text{on } (-\infty, -a-\varepsilon)$$
$$\hat{g} = 0 \quad \text{on } (-\infty, -b-\varepsilon)$$

$$\hat{h} = 0 \quad \text{on} \quad (-a-b-4\varepsilon, \infty)$$

ととる。このとき

$$sp_T(y * f) \subset \operatorname{supp} \hat{f} \subset (-a-2\varepsilon, \infty)$$

$$sp_A(x * g) \subset \operatorname{supp} \hat{g} \subset (-b-2\varepsilon, \infty)$$

よって spectral condition を仮定すれば

$$sp_B(\, L(y*f)x*g \,) \subset (-a-b-4\varepsilon, \infty)$$

補題1.2の(3)より

$$[L(y \underset{T}{*} f)x \underset{A}{*} g] \underset{B}{*} h = 0$$

よって $\forall \varphi \in X^*$ について

$$0 = \langle [L(y*f)x*g]*h, \varphi \rangle$$

$$= \iiint f(r)g(s)h(t) \langle B_t L(T_r y) A_s x, \varphi \rangle \, dr\, ds\, dt$$

$$= \varphi * k(0, 0, 0) \qquad \text{但し } k(r, s, t) = f(-r)g(-s)h(-t).$$

f, g, h の translation をとっても support の条件は変らないから上式から結局任意の r, s, t について

$$\varphi * k(r, s, t) = 0 \qquad \text{i.e. } k \in J(\phi).$$

そこで f, g, h を $\hat{f}(-a) = \hat{g}(-b) = \hat{h}(-c) = 1$ ととれば

$$(a, b, c) \notin sp(\phi)$$

$a + b > c$ のときも同様でこれから $sp(\phi) \subset G$.

逆に $sp(\phi) \subset G$ とする。

$$sp_T(y) \subset (a, \infty) \qquad sp_A(x) \subset (b, \infty)$$

先ず夫々を compact とすると

$\exists\, \varepsilon>0,\ d\ ;\quad sp(y) \subset (a+2\varepsilon,\ d) \quad sp(x) \subset (b+2\varepsilon,\ d)$

今 $\hat{f}=1$ on $(a+2\varepsilon, d)$ $\hat{g}=1$ on $(b+2\varepsilon, d)$ とすると、1.2 の (4) より

$$y*f=y, \quad x*g=x$$

$$\therefore \quad \langle [L(y)x]*h,\ \varphi\rangle = \varphi * k(0,0,0)$$

更に $\hat{f}=0$ on $(-\infty,\ a+\varepsilon)$ $\hat{g}=0$ on $(-\infty,\ b+\varepsilon)$

$\hat{h}=0$ on $(a+b+\varepsilon,\ \infty)$

ととると、 $t<r+s+\varepsilon$ のとき

$$\hat{k}(r,s,t) = \hat{f}(-r)\,\hat{g}(-s)\,\hat{h}(-t) = 0$$

一方 $G \subset \{(a,b,c) \mid c<a+b+\varepsilon\}$

$$\therefore \quad sp(\varphi) \subset \mathrm{Int.}\,\hat{k}^{-1}(0).$$

よって 1.2 の (3) より(と同様にして)

$\varphi * k = 0$ よって

$$\varphi * k(0,0,0) = \langle [L(y)x]*h,\ \varphi\rangle = 0 \quad \forall \varphi$$

即ち $h \in J(L(y)x)$。 $c \leq a+b$ のとき $\hat{h}(c)=1$ ととれるから、これから $c \notin sp(L(y)x)$.

$$sp(L(y)x) \subset (a+b,\ \infty)$$

一般の case は $L^1(R)$ の approximate identity で Fourier 変換の support が compact なものをとり、これと convolution をとって前記の場合に帰着させる。 $(-\infty,\ a)$ についても

同様に議論出来る. 証 了.

Proposition 2.4. $B_t L(y) = L(T_t y) A_t$.

このとき もし L が 1対1 写像なら

$L(y) M_A[b, \infty) \subseteq M_B[a+b, \infty) \ \forall b \Rightarrow y \in M_T[a, \infty)$

又 $L(y) M_A[-\infty, b] \subseteq M_B[-\infty, a+b] \ \forall b \Rightarrow y \in M_T[-\infty, a]$

証明. $\forall f \in I_0[a, \infty)$ について $y * f = 0$ を示す.

$g \in L^1(R)$, $\operatorname{supp}\hat{g} \subset [0, \infty)$ $\quad g_0(w) \equiv e^{ibw} g(w)$ とする

と $\operatorname{supp}\hat{g}_0 \subset [b, \infty)$. よって $x_b = x \underset{A}{*} g_0$ は

$M_A[b, \infty)$ の元で $L(y) x_b \in M_B[a+b, \infty)$

そこで $\quad h(u) \equiv e^{ibu} f(u)$ とすると

$\hat{h} = 0$; $[a+b, \infty)$ のある近傍で.

$$\Rightarrow \quad [L(y) x_b] * h = 0$$

$\forall \varphi \in X^*$ について

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle [L(y) x_b] * h, \varphi \rangle \\
&= \int e^{ibt} f(t) \langle L(T_t y) A_t x_b, \varphi \rangle dt \\
&= \iint e^{i(b+s)} f(t) g(s) \langle L(T_t y) A_{t+s} x, \varphi \rangle dt\, ds \\
&= \iint e^{ibu} f(t) g(u-t) \langle L(T_t y) A_u x, \varphi \rangle dt\, du \\
&= \int e^{ibu} h(u)\, du \quad \forall b
\end{aligned}
$$

但し

$$h(u) = \int f(t) g(u-t) < L(T_t y) A_u x, \varphi > dt$$

でこれは u の連続関数。

上式は h の Fourier 逆変換が 0 を意味し従って $h = 0$ a.e.

よって h はいたる所 0 で特に

$$h(0) = \int f(t) g(-t) < L(T_t y) x, \varphi > dt = 0.$$

上のことは g の任意の translation をとっても成立するから、

$$\int f(t) g(u-t) < L(T_t y) x, \varphi > dt = k * g(u) = 0$$

$$k(t) = f(t) < L(T_t y) x, \varphi >。$$

従って $\widehat{k * g} = \hat{k} \hat{g} = 0$。

これより $\hat{k} = 0$ on $[0, \infty)$. 特に

$$\hat{k}(0) = \int f(t) < L(T_t y) x, \varphi > dt$$

$$= < L(y \underset{T}{*} f) x, \varphi > = 0.$$

$\therefore$ $L(y \underset{T}{*} f) = 0 \implies y * f = 0.$

定理 1.6 から $y \in M_T[a, \infty)$.

他のときも同様に出来る。

補題 2.5. $A_t x = x \quad \forall t \iff sp_A(x) = \{0\}$

証明 略

以上から spectral subspace は one-parameter 群と一

意にきめることが言える.

定理 2.6. Spectral subspace が一致すれば one-parameter 群は相等しい.

証明. A_t, B_t が与えられたとする. $B(X)$ 上で

$$T_t(A) = B_t A A_t^{-1} \quad \text{L: Identity map}$$

とすると、2.4 から X 上の identity operator は $M_T[0, \infty)$ および $M_T[-\infty, 0]$ の元になる。よって

$$id \in M_T[0] \implies T_t(id) = id. \quad (2.5\ より)$$

これは $A_t = B_t$ を示している.

§3. 応用例 1. Quasi-invariant measure.

円周上のよく知られた F & M. Riesz の定理

" analytic な測度は Lebesgue 測度と同値である "

は又

" analytic な測度は回転について quasi-invariant "

と言いかえることが出来る. ここで analytic な測度という概念は前記の spectrum を使えば自然にもっと一般的な状況に迄拡大出来るから上の命題もそのような状況で考えることが可能になる. ここではそれについての Forelli [6] の結果をのべる. S を locally compact Hausdorff 空間とし

$$t \in R \longrightarrow T_t \text{ on } S$$

を S 上の homeomorphism への表現とする.

λ ; S の有界な Baire 測度　　$f \in L^1(R)$

$$(\lambda * f)(E) \equiv \int_R \lambda(T_{-t}E) f(t)\, dt$$

で convolution $\lambda * f$ を定義し、これにより $sp(\lambda)$ も前のように定義する。$sp(\lambda) \subset [0, \infty)$ の時 λ を analytic と呼ぶことにする。この定義は円周上で T_t を

$$T_t(e^{ix}) = e^{it}e^{ix}$$

としたとき古典的な analytic measure の定義と一致している。$C_0(S)$ を S 上の ∞ で 0 になる連続関数環とし、T_t は更に $C_0(S)$ 上に自然に働くものとする. ($T_t f(P) = f(T_{-t}P)$)
T_t は $C_0(S)$ 上の一様有界強連続な線型作用素の one-parameter 群である.

定理 3.1. 正の測度 μ が T_t について quasi-invariant であることは次のことと同値である。

(1) $\exists\, U_t$; one-parameter unitary 群 on $L^2(\mu)$

$$U_t(fg) = T_t f\, U_t g \quad f \in C_0(S) \quad g \in L^2(\mu)$$

又は

(2) $L^2(\mu)$ 内に単位の分解 $\{M_t\}$ があって

$$\forall f \in C_0(S) \quad sp(f) \subset (s, \infty) \Rightarrow fM_t \subseteq M_{s+t}$$

証明. quasi-invariant と (1) が同値なことはよくある characterization であるから詳細は略する. unitary 群は

$$\phi_t = \frac{dT_t\mu}{d\mu} \quad (\text{但し } T_t\mu(E) = \mu(T_{-t}E)) \quad \text{としたとき}$$

$$U_t g = \sqrt{\phi_t}\, T_t g$$

で与えられる。

(1) $\Longrightarrow$ (2) $M_t = \{x \in L^2(\mu)\ ;\ sp_U(x) \subset [t, \infty)\} = M_U[t, \infty)$

とすれば 1.8 からこれは左側連続な単位の分解。更に 2.3. で $X = L^2(\mu)$, $A_t = B_t = U_t$ $Y = C_0(S)$

L ; $C_0(S)$ の $L^2(\mu)$ 上への~~機~~積作用素としての表現

ととると、(1) の式は

$$U_t L(f) g = L(T_t f) U_t g$$

となるから、spectral condition より (2) の条件は成立する。

(2) $\Longrightarrow$ (1). M_t を必要なら $\overline{M_t} = \bigcap_{s<t} M_s$ でおきかえても必要な条件はみたされてるから最初から左側連続としてよい。

P_E を M_t より作った spectral measure とし

$$U_t = \int e^{-ist} dP_s$$

とおく。(1) の式を出すには前と同様に考えると逆に 2.3 の spectral condition をたしかめればよいことになる。(a, ∞) 区間については (2) の条件そのまま、又 $(-\infty, a)$ 区間については

$$sp_T(\bar{f}) = -sp_T(f)$$

に着目して (a, ∞) の話によみかえればよい。

補題 3.2. λ ; analytic 測度 そのとき

$\forall g \in C_0(S)$ $sp_T(g) \subset (0, \infty)$ について

$$\int g \, d\lambda = 0$$

証明. $\phi(t) \equiv \int_S T_t g \, d\lambda$ とおくと $\phi(t)$ は R 上の有界な連続関数。今 $\gamma \notin sp(\lambda)$ とすると

$$\exists f \in J(\lambda) ; \hat{f}(\gamma) = 1$$

$$\int g \, d(\lambda * f) = \iint T_{-t} g f(t) \, d\lambda \, dt$$

$$= \int \phi(-t) f(t) \, dt = 0$$

$J(\lambda)$ は translation で不変だから上式は

$$\int \phi(-t) f(s+t) \, dt = 0 \quad \forall s$$

よって

$$\int f(t) \phi(s-t) \, dt = \phi * f(s) = 0$$

$\phi * f = 0$, $f \in J(\phi)$. 故に $\gamma \notin sp(\phi)$.

又 $\gamma \notin -sp(g)$ とすると

$$\exists f \in J(g) ; \hat{f}(-\gamma) = 1$$

$$0 = \int g * f \, d\lambda = \iint T_t g f(t) \, d\lambda \, dt = \int_R \phi(t) f(t) \, dt.$$

前と同様にして

$$\int \phi(t) f(t-s) \, dt = \phi * f^*(s) = 0 \quad \text{但し } f^*(t) = f(-t).$$

これより $f^* \in J(\phi)$; $\hat{f^*}(\gamma) = \hat{f}(-\gamma) = 1$

以上から　　$sp(\phi) \subset -sp_T(g) \cap sp(\lambda) = \phi$（空集合）

よって　$\phi = 0$　特に　$\phi(0) = \int g \, d\lambda = 0$.

定理 3.3. Analytic な測度は T_t について quasi-invariant である.

証明: 3.1 の (2) が成立することを $\mu = |\lambda|$ について示す.

$$M_t \equiv L^2\text{-closure}\,\{ g \in C_0(S) \,;\, sp_T(g) \subset (t, \infty) \}$$

$g \in C_0(S)$ で $sp_T(g)$ が compact なものは当然 $\vee M_t$ に入るから, これより　$\vee M_t = L^2(\mu)$.

又 2.3 で　$X = Y = C_0(S)$　$A_t = B_t = T_t = \text{given } T_t$

$L(f)$; 積作用素.

とすると commutation relation は成立してるから

$$\begin{matrix} sp_T(f) \subset (s, \infty) \\ sp_T(g) \subset (t, \infty) \end{matrix} \Longrightarrow sp(fg) \subset (s+t, \infty)$$

よって　$f M_t \subseteq M_{s+t}$.

次に　$h \in \wedge M_t$ をとる. ~~$sp_T(h$~~ $f \in C_0(S)$　$sp_T(f) \subset (s, \infty)$ をとり $g \in C_0(S)$ を　$sp_T(g) \subset (-s, \infty)$ とすると

$$sp(fg) \subset (0, \infty)$$

よって前の補題から　$\phi = \frac{d\lambda}{d\mu}$ として

$$\int fg\phi \, d\mu = \int fg \, d\lambda = 0$$

ところで $h \in M_{\neg s}$ から h は上のような g で近似できる。

$$\int f h \phi \, d\mu = 0.$$

従って上式は補題1.5より任意の $f \in C_0(S)$ について成立つ。
よって $h\phi = 0$ a.e. μ
$|\phi| = 1$ a.e. μ より $h = 0$ 証明了。

§4. 作用素環への応用.

von Neumann 代数における derivation が常に inner であるという境[ ] の定理はその後いくつかの別証明が出ているがいずれも構成的ではなかった。しかし Arveson [ ]は spectral subspace の議論を用いて実際に generator を構成することにより上の結果を示し、現在ではそれがもっとも標準的な証明と考えられている。ここではそれを更に一般化した D. Olsen [ ]の結果を、定理2.3 を用いて簡略化した証明でのべることにする。

ヒルベルト空間 H 上の有界な線型作用素環 B(H) 内のノルムで closed な自己共軛環 ($a \in \mathfrak{A} \Rightarrow a^* \in \mathfrak{A}$) を C^*-代数という。これは又抽象的に Banach $*$-代数でノルムが $\|a^*a\| = \|a\|^2$ をみたすものとしても定義できる。B(H) 内の weak topology で closed な自己共軛環を von Neumann

代数という。von Neumann 代数は空間に作用しているがその性質を抽象化した次のような C^*-代数を一般に AW^*-代数と呼ぶ。

"C^*-代数 $\mathfrak{A}$ 内の任意の集合 S について、その annihilator

$$L(S)=\{a\in\mathfrak{A} \mid aS=0\}$$

をとると、$\mathfrak{A}$ の中に projection P_S が存在して $\mathfrak{A}P_S = L(S)$ となる。AW^*-代数は von Neumann 代数に非常に近いが両者は一致しないことが知られている(Dixmier [5])

補題 4.1. α_t を C^*-代数 $\mathfrak{A}$ での one-parameter 強連続な $*$-automorphism 群とする。

$$M_\alpha[s,\infty)M_\alpha[t,\infty)\subseteq M_\alpha[s+t,\infty)$$

証明. $L_a b \equiv ab$ と定義する。$B(\mathfrak{A})$ において

$\rho_t(A)=\alpha_t A\alpha_t^{-1}$ とおくと、定理 2.3 が $X=\mathfrak{A}$, $Y=B(\mathfrak{A})$ として適用できるから

$$L_a\in M_\rho[s,\infty) \Longrightarrow L_a M_\alpha[t,\infty) = aM_\alpha[t,\infty) \subseteq M_\alpha[s+t,\infty)$$

一方容易にわかるように

$$L_a\in M_\rho[s,\infty) \iff a\in M_\alpha[s,\infty)$$

注意；作用素環の論文では generator の性質もあってか現在迄の spectral subspace についてのものはすべて、その定義

に Fourier 変換の代りに Fourier 逆変換を用いている。結果は勿論本質的には変るものではないが論文を読むとき注意を要する。ここでは前節よりの記を統一するためにすべて通常の Fourier 変換 $\hat{f}(s)=\int f(t)e^{-its}dt$ を用いる。

よく知られた Paley-Wiener の定理を複素平面の上半分に用いることにより次の補題が得られる。

補題 4.2. $f\in L^1(R)$ を $\hat{f}$ が $(0,\infty)$ に compact な support をもつような関数とすると、上半平面の H^∞ の元 h に対して

$$\int_R f(t)h(t)\,dt=0$$

証明. Paley-Wiener の定理から

$$F(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \hat{f}(t)e^{izt}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(t)e^{izt}dt$$

とおくと、$F(z)$ は $f(s)$ の上半平面への拡張で H^2 の元である。

更に $$F_n(z)=\left(1-\left(\frac{z}{z+i}\right)^n\right)F(z)$$

とおけば $F_n\in H^1\cap H^2$ だから、これについて

$$\int_{-\infty}^{\infty}F_n(t)h(t)\,dt=0$$

を示せばよい。そこで $F\in H^1_2\cap H^2$ をとり

$$g(z)=(z^2+1)h(z)F(z)=\frac{z-i}{z+i}h(z)(z+i)^2F(z)$$

とおくと

$$(z+i)^2 F(z) \in \widetilde{H^1} \ (\text{disc の } H^1 \text{ の image})$$

又 $\dfrac{z-i}{z+i} h(z)$ は有界な analytic function だから結局

$$g(z) \in \widetilde{H^1}.$$

よって $\dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$ が $g(z)$ の $z=i$ での Poisson kernel となるから

$$\frac{1}{\pi}\int_R f(t)h(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_R \frac{g(t)}{1+t^2}\,dt = g(i) = 0$$

δ を C^*-代数 $\mathfrak{A}$ の derivation で $\delta = -\delta^*$ となるものとする（但し $\delta^*(x) \equiv \delta(x^*)^*$, よって系のことは $\delta(x^*) = -\delta(x)^*$ を意味する）. このとき $\alpha_t = \exp it\delta$ $(t \in R)$ を考えると、これは $\mathfrak{A}$ の $*$-同型対応群になる. $\{\alpha_t\}$ は同型対応のノルムの意味でも連続になっているから勿論その spectral subspace $M_\alpha[t, \infty)$ が考えられる.

以下 $\mathfrak{A}$ を AW^*-代数とする. このとき $M_\alpha[t, \infty)$ の left annihilator は、ある projection P_t が存在して $\mathfrak{A}P_t$ とかける. 明らかに P_t は増加列である.

補題 4.3. $t \leqq 0$ のとき $P_t = 0$, 又 $t > \|\delta\|$ のとき $P_t = 1$ である.

証明. $B(\mathfrak{A})$ 内で $\varphi_t = \alpha_t \cdot \alpha_t^{-1}$ とおくと

命題2.4より $L_1 \in M_\varphi[0,\infty) \Rightarrow 1 \in M_\alpha[0,\infty)$

従って系が出る。後半は

$$f(z) = e^{iz\|\delta\|}\, e^{iz\delta} \qquad z = x+iy$$

とおくと、これは $y \geq 0$ で連続、$y>0$ で analytic な作用素関数で且つ

$$\|f(z)\| \leq e^{-y\|\delta\|}\, \|e^{ix\delta}\|\, \|e^{-y\delta}\| \leq e^{-y\|\delta\|}\, e^{y\|\delta\|} = 1$$

で有界。よって $\forall \varphi \in \mathfrak{A}^*$ について $(a \in \mathfrak{A})$

$$\langle f(z)(a),\ \varphi \rangle \in H^\infty.$$

従って $\hat{g}$ が $(0,\infty)$ に compact support をもつとき

$$\int g(t) \langle f(t)(a),\ \varphi \rangle dt = 0.$$

そこで $g_0(t) = e^{it\|\delta\|} g(t)$ とおき

$$\operatorname{supp} \hat{g} \subset (\varepsilon - \tfrac{\varepsilon}{n},\ \infty)$$

とると $\operatorname{supp} \hat{g}_0 \subset (\|\delta\| + \varepsilon - \tfrac{\varepsilon}{n},\ \infty)$.

よって $\langle a \underset{\alpha}{*} g_0,\ \varphi \rangle = 0 \qquad \forall \varphi \in \mathfrak{A}^*,\ a \in \mathfrak{A}$.

$\therefore \quad a \underset{\alpha}{*} g_0 = 0$

定理1.6から $M_\alpha[\|\delta\| + \varepsilon,\ \infty) = \{0\}$.

従って $t > \|\delta\|$ のとき $P_t = 1$

さてここで one-parameter unitary 群 u_t を

$$u_t = \int_0^{\|\delta\|} e^{-ist}\, dP_s$$

と定義する。この積分はノルムで収束するから AW*-代数 $\mathfrak{A}$ 内で意味をもつ。求める定理は

定理 4.4. AW*-代数 $\mathfrak{A}$ の derivation はすべて inner である。

証明. $\mathfrak{A}$ の任意の derivation は上のような derivation の linear combination でかけるから、$\delta = -\delta^*$ としてよい。

$$h = \int_0^{\|\delta\|} s\, dP_s$$ とおく。次の同型群 α_t とユニタリー群

u_t について $$\alpha_t(x) = u_t x u_t^*$$
が言えれば両辺を $t=0$ で微分して
$$\delta(x) = xh - hx,$$
即ち $-h$ (negative generator! − フーリエ変換をとったので) により δ は inner になる。

そこで定理2.3で
$$X = \mathfrak{A},\quad A_t = B_t = L_{u_t},\quad Y = \{L_a \mid a \in \mathfrak{A}\}$$
$$T_t(L_a) = L_{\alpha_t(a)},\quad \text{mapping } L = \text{identity in } Y,$$
として考えると、求める式
$$\alpha_t(x) u_t y = u_t x y \qquad \forall x, y \in \mathfrak{A}$$
は
$$B_t L_x y = T_t(L_x) A_t y.$$
よって spectral condition をたしかめればよい。先ず
$$L_a \underset{T}{*} f = 0 \iff a \underset{\alpha}{*} f = 0$$

より $\quad L_a \in M_T[t, w] \Longleftrightarrow a \in M_\alpha[t, w]$.

次に $a \in M_A[-\infty, t]$ の条件を命題1.7のようにして調べると、

$$a \in M_A[-\infty, t] \Longleftrightarrow P_{t+\varepsilon} a = a \quad \forall \varepsilon > 0.$$

$sp_T(L_a) \subset (-\infty, t) \quad sp_A(b) \subset (-\infty, s)$ とする.

$\exists \varepsilon_0 > 0$; $sp(b) \subset (-\infty, s-\varepsilon_0)$. $\quad \therefore \quad P_{s-\varepsilon_0} b = b$

$\forall x \in M_\alpha[t+s-\varepsilon_0, \infty), \quad sp_\alpha(a^*) \subset (-t, \infty)$

と 4.1 より $\quad a^* x \in M_\alpha[s-\varepsilon_0, \infty)$

$\therefore \quad b^* a^* x = b^* P_{s-\varepsilon_0} a^* x = 0$

よって $\quad b^* a^* P_{t+s-\varepsilon_0} = b^* a^*$ i.e. $ab = ab P_{t+s-\varepsilon_0}$

$\Longrightarrow \quad ab \in M_A[-\infty, t+s-\varepsilon_0]$

即ち $\quad sp_A(ab) \subset (-\infty, t+s)$

又 $\quad sp_T(L_a) \subset (t, \infty) \quad sp_A(b) \subset (s, \infty)$ のとき

$\forall x \in M_\alpha[r, \infty) \Longrightarrow ax \in M_\alpha[t+r, \infty)$

$\therefore \quad P_{t+r} a x = 0$ i.e. $P_{t+r} a$ は $M_\alpha[r, \infty)$ の annihilator. よって $\quad P_{t+r} a P_r = P_{t+r} a$.

一方 $\exists \varepsilon > 0$; $sp_A(b) \subset [s+\varepsilon, \infty)$. 従って

$$P_{t+s+\varepsilon} ab = P_{t+s+\varepsilon} a P_{s+\varepsilon} b = 0$$

$\therefore \quad \forall f \in I_c[t+s+\varepsilon, \infty)$

$$ab \underset{A}{*} f = \int_R f(t) u_t ab \, dt = \int_0^{\|c\|} \hat{f}(r) dP_r ab$$

$$= \int_0^{t+s+\varepsilon} \hat{f}(r)\, dP_r ab + \int_{t+s+\varepsilon}^{\|\delta\|} \hat{f}(r)\, dP_r ab = 0$$

定理1.6より　$ab \in M_A[t+s+\varepsilon, \infty)$ i.e. $sp_A(ab) \subset (t+s, \infty)$

以上から定理2.3より　$\alpha_t(x)u_t = u_t x \quad (\forall x \in \mathfrak{M})$

§5. Locally compact 群への拡張その他.

これ迄のことは簡単のために実数上の one-parameter 群についてのべてきたが spectral subspace の方法の応用は多岐にわたり、そのためには議論を可換な locally compact 群に迄拡張してやっておくことが必要になる。しかし、そのためには

$$x * f = \int_R f(t) A_t x\, dt$$

が存在することが先決であるから、たとえば§1についても無条件な一般化は無理である。Arveson [1]はその代りとして、von Neumann 代数の場合に適合するように積分の定義を拡張し(適当な one-parameter 群に対して)て、群の制限なしに spectral subspace の定義を行ない、議論を進めて one-parameter ユニタリー群の内部同型化についての Borchers の定理、von Neumann 代数での derivation の定理等をみちびいている。しかし元の群 G を separable に限定すれば強積分 $\int_G f(t) A_t x\, dt$ が存在するから、例えば§1での結果は殆んどそのまま、R から G に迄拡張できる。ここで $sp_A(x)$ は $L^1(G)$

の閉イデアル $J(x)$ の hull として G の dual $\hat{G}$ の中の閉集合という形で定義されるわけである。整数群や n 次ユークリッド空間などがよく取扱われる例である。本論での基本定理2.3は Forelli [6]によるものであるがこれ迄の作用素環の論文では、これをとりあげずかえってその特別な形である $A_t = B_t = \alpha_t$, $T_t = \alpha_t \cdot \alpha_t^{-1}$ などについての議論をくり返している。しかし§4にみられるように定理2.3の方がはるかに一般で有効なわけであるから、もっとこの結果に注目すべきである。従ってこれを separable な可換な locally compact 群に拡張することは興味あることと思われる。2.4もそれに応じての拡張が必要であろう。これについて Arveson の formulation は群は一般になっているがまだ Forelli の元の形からみれば不十分である。

文 献

1. W. Arveson ; On groups of automorphisms of operator algebras, to appear in J. Functional Analysis

2. H. J. Borchers; Über Ableitungen von C^*-Algebren, Nachr. d. Göttinger Akad. Nr 2 (1973)

3. ―――――― ; Characterization of inner $*$-automorphisms of W^*-algebras, 数理研 preprint, 1973

4. A. Connes ; Une classification des facteurs de type III, Ann. sci. d. l'École Nor. Sup. 6 (1973), 133 ~ 252

5. J. Dixmier ; Sur certains espaces considerés par M. H. Stone, Summa Bradsil, Math., 2 (1951), 185 − 202

6. F. Forelli ; Analytic and quasi-invariant measures, Acta Math. 118 (1967), 33 − 59

7. K. de Leeuw and I. Glicksberg ; Quasi-invariance and analyticity of measures on compact groups, Acta Math., 109 (1963)

8. D. Olsen ; Derivations of AW^*-algebras are

inner, preprint Univ. of Copenhagen, 1973.

9. D. Olsen and G. K. Pedersen, Derivations of C^*-algebras have semi-continuous generators, preprint, Univ. of Copenhagen, 1973.

10. S. Sakai; Derivations of W^*-algebras, Ann. Math., 83 (1966), 273 ~ 279.